Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра Математической Теории Игр и Статистических Решений

Агеев Петр Владимирович

Магистерская диссертация

Интеллектуальные методы конкурентной борьбы
Intelligent methods of competitive struggle

Направление 010402
Прикладная математика и информатика
Магистерская программа «Исследование операций и системный анализ»

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Тарашнина С. И.

Санкт-Петербург
2018

Содержание

Введение

В условиях нынешнего мирового экономического спада, а также перенасыщения рынка товарами и услугами конкурентная борьба среди производителей выходит совершенно на иной уровень. Она стала более динамичной, ожесточенной, менее прогнозируемой и анализируемой. Изучение соперников с целью выявления их сильных и слабых сторон является одним из старейших видов информационной деятельности человека. С развитием современных технологий характер подобной деятельности существенно изменился. С одной стороны, появились новые способы добывания и обработки информации, с другой стороны, объем и сложность ее резко возросли [1].

В связи с этим существенно увеличилась потребность в новых методах ведения конкурентной борьбы и прогнозирования действий соперников, новых подходах к добыванию информации о противодействующей стороне и ее сильных и слабых сторонах. Настало время, когда классические ценовые и неценовые методы конкурентной борьбы перестают эффективно работать, и их реализация все дороже обходятся бизнесу.

На сегодняшний день подобные методы конкурентного противодействия зачастую в основе своей имеют лишь экономическую теорию, игнорируя применение каких-либо новаторских математических методов. Такой подход сильно снижает точность полученных результатов, уменьшает область их использования, а также делает их менее универсальными и сложно адаптируемыми под динамически изменяющиеся условия. Именно динамически изменяющиеся условия рынка являются отличительной чертой современного мира, которая и диктует необходимость глубокого пересмотра существующих и создания новых подходов к вопросам конкурентной борьбы.

Применение же методов теории игр и исследования операций к решению задач, связанных с конкурентным противодействием двух и более участников, позволяет взглянуть на подобную проблематику с совершенно другой стороны, а также получить обоснованные и гораздо более точные результаты, которые могут быть расширены и адаптированы на смежные области.

Таким образом, применение новых подходов к решению задач, связанных с борьбой между конкурирующими участниками рынка, является современной, чрезвычайно востребованной и актуальной задачей.

В данном исследовании мы рассмотрим задачу конкурентной борьбы между тремя участниками телекоммуникационного рынка. Модель для решения этой задачи будет построена как неантагонистическая игра в нормальной форме с функциями выигрыша, учитывающими цели и задачи участников.

На следующем этапе построим абсолютное равновесие по Нэшу в общем виде, поскольку это решение неантагонистической игры является динамически устойчивым по сравнению с равновесием по Нэшу, которое накладывает серьезные ограничения на применимость результатов в многошаговых играх.

Далее проведем SWOT-анализ для четырех крупнейших в Российской Федерации телекоммуникационных компаний. На следующем этапе исследования, используя результаты проведенного SWOT-анализа для определения множеств стратегий игроков, проиллюстрируем полученные результаты на примере.

Постановка задачи

Целью данного исследования является изучение и формализация процесса конкурентной борьбы на рынке телекоммуникационных услуг между тремя фирмами с использованием аппарата математической теории игр. Все компании (участники рынка) в зависимости от роли в процессе конкурентной борьбы могут быть разделены на следующие группы: рыночный лидер, претендент, и последователь – участник, нашедший свою нишу рынка. В данном исследовании мы строим модель конкуренции на рынке между тремя фирмами: фирмой-лидером, фирмой-претендентом и фирмой-последователем.

Фирма-лидер – это превалирующая на рынке компания, которая действует по трем основным направлениям:

1) расширение рынка путем привлечения новых клиентов и нахождения новых сфер деятельности;
2) увеличение своей доли рынка в текущих сферах деятельности;
3) защита своего бизнеса от посягательств путем использования оборонительных стратегий.

Фирма-претендент – компания, не сильно отстающая от лидера рынка и пытающаяся этим лидером стать путем применения атакующих стратегий.

Фирма-последователь – компания, которая проводит политику следования за рыночными лидерами и не рискует своими рыночными позициями. Фирма-последователь использует стратегии, направленные, по возможности, на расширение своей доли рынка, но такие, которые не вызывают активного противодействия конкурентов [1].

В данной работе процесс конкурентной борьбы формализуется как двухуровневая неантагонистическая игра, в которой игроками являются телекоммуникационные фирмы, каждая из которых имеет свою определенную абонентскую базу. Выигрыши игроков зависят от предпочтений абонентов. Цели игроков отражены в функциях выигрыша. Предполагается, что предпочтения абонентов на множестве услуг заданы. Задаются они через разбиения множества всех абонентов на различные подмножества, в зависимости от различных характеристик, таких как цена тарифа, объем различных услуг в рамках тарифа и т.д. Стратегии игроков разработаны с целью удовлетворить как можно большее число абонентов из различных групп.

В качестве решения данной игры рассматривается абсолютное равновесие («subgame perfect equilibrium»), которое обеспечивает наилучший результат для фирм, при условии, что все они придерживаются определенного вектора действий.

Таким образом, в работе предлагается игрокам следовать стратегиям, входящим в абсолютное равновесие по Нэшу. Они позволяют фирме-лидеру оставаться на лидирующей позиции рынка, а фирме-претенденту – выявлять оптимальное поведение, позволяющее достигнуть лидирующих позиций на рынке. Для фирмы-последователя стратегии, которые входят в абсолютное равновесие по Нэшу, позволяют продолжать занимать свою нишу и, при возможности, переманивать абонентов от других фирм, не вызывая при этом активного противодействия со стороны лидеров рынка, которое могло бы поставить под вопрос дальнейшее существование фирмы в принципе.

При этом стоит учитывать, что фирма-последователь играет не формальную, а немаловажную роль. Она может как подыгрывать лидеру, так и претенденту, оказывая тем самым существенное влияние на расстановку сил на рынке.

Обзор литературы

Анализ современной литературы, посвященной моделированию конкурентной борьбы на рынке, показал, что эта тематика является довольно разнообразной и не в полной мере изученной, поскольку возможно огромное множество различных постановок подобного рода задач, что делает ее особенно востребованной на сегодняшний день. Многие авторы подходили к вопросу моделирования конкуренции на рынке с различных сторон в зависимости от видов и сфер конкурентной борьбы, а также, исходя из областей приложения проводимых исследований. Стоит отметить, однако, что в большинстве научных работ конкуренция моделируется авторами именно как динамическая модель.

Довольно часто для моделирования конкурентного противодействия авторы используют теорию имитационного моделирования. Например, авторы в своей работе [3] подходят к задаче моделирования конкурентной борьбы с позиций имитационного моделирования, используя при этом такие его виды, как агентное, дискретно-событийное моделирования и системную динамику, попутно сравнивая получившиеся модели и возможности их использования между собой. Другие же авторы в своей работе [4] подошли к задаче моделирования конкуренции двух фирм с позиций исследования экономической динамики, сформулировав и решив задачу с использованием системы дифференциальных уравнений, которые описывали изменение объемов продаж конкурирующих между собой фирм с течением времени.

Помимо прочего, ряд авторов [5], [6] подходят к решению задачи конкурентной борьбы на рынке посредством использования такого сугубо экономического метода, как SWOT-анализа. Этот метод позволяет выделить сильные и слабые стороны конкурентов, а также идентифицировать возможности и угрозы для компании и, исходя из этого, разработать стратегии действий.

На наш взгляд, естественным является описание конкурентной борьбы как математической модели конфликтной ситуации [2].

В монографии Штакельберга [7] конкуренция на рынке представлена через многошаговую модель принятия решений двух фирм. На первом шаге решение принимает фирма, занимающая лидирующие позиции, а на следующем шаге, учитывая решение лидера, свое решение принимает фирма, пытающаяся перехватить лидерство на рынке [2]. При этом при принятии решений оба игрока преследуют свои цели, в общем случае, отличающиеся между собой.

Схожая задача исследовалась в [8], при этом, в работе была рассмотрена модель конкуренции в условиях монополии, дуополии и дифференциации по качеству товара. Однако, отличие этой работы от нашего исследования в том, что она ориентирована в большей степени на решение задачи достижения фирмами оптимального качества продукции в условиях конкуренции.

Мы формализуем задачу как двухшаговую неантагонистическую игру трех лиц [9], [10]. Подобными играми занимались многие зарубежные и отечественные авторы, исследуя их в работах [11], [12], [13].

К примеру, в статье [11] автор рассматривает игру n лиц и вводит понятие простого равновесия по Нэшу («Nash equilibrium»).

В статье [14] рассматриваются непрерывные игры и игры с вогнутыми функциями выигрышей, а также рассматриваются условия существования сильного равновесия по Нэшу («strong Nash equilibrium») в различных играх. Помимо прочего, в этой работе автор предлагает алгоритм по вычислению сильного равновесия по Нэшу, хорошо проиллюстрированный примерами экономического приложения данного равновесия.

В статье [15] авторы рассматривают бесконечные игры с полной информацией с конечным или счетным количеством игроков и получают условия существования абсолютного равновесия по Нэшу («subgame perfect equilibrium»).

Таким образом, обзор литературы показал, что решаемая в данном исследовании задача является новой и ранее не исследованной, что повышает научную ценность работы.

Глава 1. Методологическая база исследования

В данной главе мы опишем использованные в данной работе методы, введем основные понятия, которые требуются для более полного понимания проведенного исследования, а также приведем схему этапов решения задачи.

В качестве методологической базы исследования в данной работе используется теория игр, используемая в совокупности с некоторыми методами стратегического планирования, такими как SWOT-анализ.

1.1. SWOT-анализ

SWOT-анализ – это метод, позволяющий комплексно оценить факторы, оказывающие влияние на развитие компании. Вообще говоря, одним из преимуществ такого анализа является то, что он применим в различных сферах экономики и управления, поскольку легко адаптируем к объектам исследования различных уровней и к различным поставленным целям.

SWOT-анализ заключается в анализе и обнаружении внешних и внутренних факторов объекта анализа, которые можно разделить на четыре группы: «сильные стороны» («strengths»), «слабые стороны» («weaknesses»), «возможности» («opportunities»), угрозы («threats»). Первые две группы относятся к внутренним факторам исследуемого объекта, влияние на которые оказывает сам объект. Вторые две группы можно отнести к факторам внешним, поскольку они оказывают воздействие на объект исследования извне, и объектом эти факторы не контролируются. К сильным сторонам анализируемого объекта (компании) согласно методологии SWOT-анализа относят такие внутренние факторы, которые способствуют более выгодному положению на рынке или обеспечивают конкурентное преимущество объекта анализа. К слабым сторонам объекта исследования принято относить внутренние факторы, которые явно или косвенно мешают компании занять лидирующие позиции на рынке, мешают ей развиваться, а также делают ее менее конкурентоспособной. К возможностям чаще всего относят те факторы внешней среды, которые способствуют улучшению рыночных позиций компании, росту ее конкурентоспособности и улучшению благосостояния. Угрозы представляют собой негативные факторы внешней среды, например, ужесточение законодательства, которое несет для объекта экономические потери, риски и т.п.

Как правило, проведение SWOT-анализа разделяется на 3 этапа. На первом выделяются наиболее приоритетные параметры анализа. На втором этапе составляется непосредственно стандартная матрица SWOT-анализа. На третьем этапе возможности и угрозы разбиваются на группы по приоритетности, необходимости безотлагательных действий и количестве требуемых средств и усилий. Однако, зачастую третий этап опускается, и в качестве результата анализа предоставляется стандартная матрица, полученная на этапе 2.

1.2. Многошаговые игры: термины и определения

Понятия теории игр используются для решения задач, в которых имеет место конфликтная ситуация. Их понимание необходимо для дальнейшего понимания материала, представленного в текущем исследовании.

Приведем определение неантагонистической игры из [16].

Определение 1. Неантагонистической игрой называется система вида:

$$\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N}),$$

где $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ является множеством игроков, X_i – множеством стратегий игрока i, а H_i – функцией выигрыша игрока i, определенная на декартовом произведении множеств стратегий игроков $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

Одним из решений неантагонистической игры является равновесие по Нэшу. Приведем определение равновесия по Нэшу из [16].

Определение 2. Пусть $x = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ – произвольная ситуация в игре Г, а x_i – некоторая стратегия игрока i. Тогда ситуация $(x||x_i') = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i{}', x_{i+1}, \dots, x_n)$ отличается от первой тем, что стратегия x_i игрока i заменена на стратегию x_i'. Ситуацией равновесия по Нэшу называется ситуация $x^* = (x_1^*, \dots, x_i^*, \dots, x_n^*)$, где для $\forall\, x_i \in X_i$ и $i = 1, \dots, n$ выполнено:

$$H_i(x^*) \geq H_i(x^*||x_i).$$

Введем определение сильного равновесия по Нэшу из [16].

Определение 3. Ситуацией сильного равновесия по Нэшу называется ситуация $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, если для $\forall\, S \subset N$ и $\forall\, x_s \in \prod_{i \in S} X_i$ найдется $i \in S$:

$$H_i(x^*) > H_i(x_{-S}^*, x_S),$$

где (x_{-S}^*, x_S) – ситуация, при которой не входящие в коалицию S игроки используют стратегии x_i^* $(i \in N \backslash S)$, а игроки из коалиции S используют x_j $(j \in S)$.

Введем определение многошаговой игры. Для этого сначала введем определение графа из [16].

Определение 4. Пара (X, F) называется графом, если X – некоторое конечное множество, а F – отображение X в X. Древовидный граф – это конечный связный граф без циклов, имеющий не менее двух вершин.

Введем определении многошаговой игры с полной информацией на древовидном конечном графе из [16].

Определение 5. Пусть $G = (X, F)$ – древовидный граф. Рассмотрим разбиение множества вершин X на $n+1$ множество $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$, $\bigcup_{i=1}^{n+1} X_i = X$, $X_k \cap X_l = \emptyset$, $k \neq l$ где $F_x = \emptyset$ для $x \in X_{n+1}$. Множество X_i, $i = 1, \dots, n$ называется множеством очередности i-го игрока, а множество X_{n+1} – множеством окончательных позиций. На множестве окончательных позиций X_{n+1} определены n вещественных функций $H_1(x), \dots, H_n(x)$, $x \in X_{n+1}$. Функция $H_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ называется выигрышем i-го игрока. Однозначное отображение u_i, которое каждой вершине (позиции) $x \in X_i$ ставит в соответствие некоторую вершину (позицию) $y \in F_x$, называется стратегией игрока i. Множество всевозможных стратегий игрока i обозначается через U_i. Упорядоченный набор $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$, где $u_i \in U_i$, называется ситуацией в игре, а декартово произведение $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$ – множеством ситуаций. Каждая ситуация $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ однозначно определяет партию в игре, а, следовательно, и выигрыши игроков. Пусть ситуации $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$ соответствует партия $x_0, x_1, \dots, x_l$. Тогда введем понятие функции выигрыша K_i игрока i, положив ее значение в каждой ситуации u равным значению выигрыша H_i в окончательной позиции партии $x_0, x_1, \dots, x_l$, соответствующей ситуации $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$, т.е.

$$K_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) = H_i(x_l),\ i = 1, \dots, n.$$

Функции K_i, $i = 1, \dots, n$, определены на множестве ситуаций $U = \prod_{i=1}^{n} U_i$.

Тогда получаем многошаговую игру в нормальной форме

$$\Gamma = (\ N, \{U_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N}),$$

где $N = \{\ 1, 2, 3, \dots, n\}$ является множеством игроков, U_i – множеством стратегий игрока i, а K_i – функцией выигрыша игрока i, $i = 1, \dots, n$.

Введем определение подыгры из [16], т.е. игры на подграфе.

Определение 6. Пусть $z \in X$. Рассмотрим подграф $G_z = (X_z, F)$, с которым свяжем подыгру Γ_z следующим образом. Множества очередности игроков в подыгре определяются по правилу $Y_i^z = X_i \cap X_z$, $i = 1, \dots, n$, множество окончательных позиций $Y_{n+1}^z = X_{n+1} \cap X_z$, выигрыш игрока i в подыгре, если функция $H_i^z(x) = H_i\,(x)$, $x \in Y_{n+1}^z$, $i = 1, \dots, n$. В соответствии с этим стратегия u_i^z i-го игрока в подыгре Γ_z определена как сужение стратегии u_i i-го игрока в игре Γ на множество Y_i^z, т.е.

$$u_i^z(x) = u_i(x), x \in Y_l^z = X_i \cap X_z, i = 1, \dots, n.$$

Множество всех стратегий i-го игрока в подыгре обозначается через U_i^z. В результате с каждым подграфом G_z мы связываем подыгру в нормальной форме

$$\Gamma_z = (\,N, \{\,U_i^z\}, \{\,K_i^z\}),$$

где функции выигрыша K_i^z, $i = 1, \dots, n$, определены на декартовом произведении $U^z = \prod_{i=1}^n U_i^z$.

Введем определение абсолютного равновесия по Нэшу из [16].

Определение 7. Ситуация равновесия по Нэшу $u^* = (\,u_1^*, \dots, u_n^*)$ называется ситуацией абсолютного равновесия по Нэшу в игре Γ, если для любого $z \in X$ ситуация $(u^*)^z = (\,(u_1^*)^z, \dots\,, \,(u_n^*)^z)$, где $(u_i^*)^z$ – сужение стратегии u_i^* на подыгру Γ_z, является ситуацией равновесия по Нэшу в подыгре Γ_z.

1.3. Этапы решения задачи

Задачу построения модели конкурентной борьбы в виде неантагонистической игры в терминах теории игр можно сформулировать и решить следующим образом.

На первом этапе на основе статистических данных выделяются все объекты исследования – три крупных участника рынка телекоммуникационных услуг, которые представляют собой игроков. Также на данном этапе формулируется неантагонистическая игра в нормальной форме. Под этим подразумевается определение множества игроков, их стратегий, описание функции выигрыша каждого игрока.

На втором этапе происходит построение абсолютного равновесия по Нэшу в общем виде для случая одноэтапной двухшаговой игры. Также на данном этапе проводится SWOT-анализ, на основе которого определяются основные сильные и слабые стороны каждого игрока, которые могут оказывать влияние на поведение фирмы. Результаты анализа используются для иллюстрации на примере.

На третьем этапе производится обобщение игры на l повторяющихся этапов.

Глава 2. Модель конкурентной борьбы на рынке телекоммуникационных услуг

В работе исследуется процесс конкурентной борьбы на рынке телекоммуникационных услуг между тремя фирмами: фирмой-лидером, фирмой-претендентом и фирмой-последователем. В данной главе мы построим модель конкурентной борьбы между тремя игроками в виде многошаговой неантагонистической игры. Далее мы найдем абсолютное равновесия по Нэшу в общем виде.

2.1. Формулировка задачи как многошаговой игры трех лиц

В монографии Штакельберга [2] конкуренция на рынке представлена через многошаговую модель принятия решений. На первом шаге решение принимает фирма-лидер, а на следующем шаге с учетом решения лидера свое решение принимает фирма-последователь. При этом при принятии решений каждая из фирм преследует свою цель.

В данной работе рассматривается более сложная задача. На первом шаге фирма-лидер и фирма-претендент принимают решения о том, какие именно услуги телекоммуникационного спектра и по каким ценам предложить абонентам. На данном шаге часть абонентов делает выбор в пользу первой или второй фирмы. На следующем шаге фирма-последователь с учетом выбора конкурентов принимает решение о том, что предложить потенциальным клиентам. При этом фирма-последователь стремится сохранить своих абонентов и, при соответствующей возможности, привлечь часть абонентов конкурентов. На данном шаге оставшаяся часть абонентов делает свой выбор. Таким образом, все абоненты выбирают одну из фирм. Если абонент решает остаться на своем тарифе у своего оператора, то считаем, что он выбирает соответствующую услугу у соответствующей фирмы. «Лидер» преследует цель максимизировать прибыль, при условии, что «претендент» тоже стремится максимизировать прибыль, с помощью привлечения части абонентов конкурентов. Цель «последователя» – максимизировать прибыль и удержать своих абонентов, и, при возможности, привлечь чужих абонентов. При этом последователь придерживается стратегии, которая не вызывает активных действий по отношению к нему со стороны других игроков.

Введем следующие предположения:

1) фирмы информированы об абонентских предпочтениях, сформированных с учетом цен на услуги;
2) под прибылью будем понимать разницу между ценой услуги и удельными затратами на нее; прибыль может быть только положительной;
3) доход от реализации определенной услуги определяется количеством абонентов, которые решили воспользоваться данной услугой, и ее ценой;
4) за цену на услугу принимаем суммарную стоимость услуг, которую должен заплатить абонент в месяц;
5) для определенности под телекоммуникационной услугой будем понимать определенный тариф, состоящий из пакета услуг, например, тариф, состоящий из v минут на все исходящие звонки, b гигабайт интернета и z исходящих смс сообщений. Далее количество исходящих смс сообщений опускаем из рассмотрения, так как на сегодняшний день на смену смс сообщениям пришли так называемые мессенджеры;
6) как показывает практика, в реалиях современного мира удельные затраты на тарифы, в рамках которых основной упор делается на объем интернет-трафика по сравнению с тарифами, в которых основной акцент делается на количество минут для исходящих вызовов, значительно меньше. Поскольку довольно часто абоненты пользуются интернетом

для совершения звонков, и спрос на подобные тарифы выше, то телекоммуникационные операторы устанавливают цену на интернет-тарифы выше;

7) предполагаем, что удельные затраты на услуги одного типа для разных тарифов в рамках одного оператора равны;
8) пусть фиксированные затраты в рамках одного оператора равны для всех предлагаемых тарифов;
9) фиксированные затраты для более крупных компаний выше, чем у их конкурентов, а удельные затраты меньше.
10) также сделаем предположение, что абоненты проинформированы о том, какие услуги могут предложить игроки;

За F_1 обозначим фирму-лидера, за F_2 – фирму-претендента и за F_3 – фирму-последователя. Пусть $N = \{F_1, F_2, F_3\}$ – множество игроков – телекоммуникационных компаний, оказывающих услуги на рынке: «лидер», «претендент», «последователь».

Пусть $I = \{1, \dots, m\}$ – множество услуг (тарифов), которые предлагаются на телекоммуникационном рынке. Каждый элемент $i_r \in I$ – некоторый конкретный вид услуги. Эту услугу будем называть услугой вида i_r, предлагаемой некоторой фирмой.

Обозначим через I_1, I_2 и I_3 подмножества I, содержащие услуги, которые предлагают, соответственно фирма-лидер, фирма-претендент и фирма-последователь. Предполагаем, что $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I$ и $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset$.

Пусть известны следующие величины:

c_i^k – цена услуги i у игрока F_k, где $i \in I_k$ и $k \in \{1, 2, 3\}$;

a_i – удельные затраты (затраты на единицу) на услугу i;

f_k – фиксированные затраты (т.е. затраты, не зависящие от объема услуг) на услугу игрока F_k, $k \in \{1, 2, 3\}$;

При этом фиксированные затраты являются постоянными величинами.

Обозначим через $J = \{1, \dots, n\}$ множество абонентов, пользующихся услугами, предлагаемыми на рынке. Каждый элемент $j \in J$ – некоторый абонент. Предполагаем, что абонент выбирает услугу, предложенную одной из фирм, исходя из своих внутренних предпочтений, которые задаются разбиением множества J на 2 подмножества J_T и J_P. В J_T входят абоненты, основополагающим фактором для которых при выборе оператора является низкая цена. В свою очередь J_T делится на J_{T_1}, которое состоит из абонентов, для которых наиболее важным наравне с ценой является количество минут на исходящие звонки в рамках тарифа, и на J_{T_2}, состоящее их тех, кто наравне с ценой уделяет внимание объему интернет трафика, предоставляемого в рамках тарифа. Подмножество J_P содержит абонентов-«консерваторов», под которыми мы понимаем тех абонентов, смена оператора для которых является проблемой по различным причинам, например, корпоративных пользователей.

Предполагаем, что $J = J_T \cup J_P,\ J_T \cap J_P = \emptyset$.

$$J^0 = J = J_1^0 \cup J_2^0 \cup J_3^0. \tag{1}$$

Выражение (1) описывает распределение множества абонентов между игроками на начальном этапе игры. Пусть выполняются следующие соотношения:

$$|J_1^0 \cap J_T| \geq |J_2^0 \cap J_T| > |J_3^0 \cap J_T|,$$

$$|J_1^0 \cap J_P| > |J_2^0 \cap J_P| > |J_3^0 \cap J_P|.$$

Предполагаем, что абоненты из множества $J_P \cap J_k^0$ независимо от предлагаемого тарифа всегда выбирают игрока k, где $k \in \{1, 2, 3\}$, и услугу, которую оператор предлагает в данный момент.

Под стратегией игрока F_k, где $k \in \{1, 2, 3\}$, будем понимать пару $s_k^{i_r} = \left(c_{i_r}^k, i_r\right)$, $i_r \in I_k$. Множество стратегий фирмы F_k обозначим через $S_k = \{s_k^{i_r}: i_r \in I_k\}$. Предполагаем, что стратегии фирм разработаны, исходя из результатов SWOT-анализа, и направлены на минимизацию рисков, связанных с выявленными слабыми сторонами каждой из фирм, и на использование выявленных возможностей.

Введем отношения предпочтений для абонента $j \in J$ услуг, предлагаемых фирмами F_1 и F_2. Очевидно, что стратегия игрока характеризуется следующими показателями: ценой c_i^k, количеством минут v_i^k, количеством гигабайт мобильного интернета b_i^k.

Для абонентов $j \in J \cap J_{T_2}$ будем говорить, что пара $\left(c_{i_l}^1, i_l\right)$ предпочтительнее, чем пара $\left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, т.е. $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 > b_{i_p}^2$;
2) $c_{i_l}^1 = c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 > b_{i_p}^2$;
3) $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 = b_{i_p}^2$.

Для остальных случаев:

1) если $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 < b_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^0 \cap J_{T_2}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^0 \cap J_{T_2}$.
2) если $c_{i_l}^1 > c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 > b_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^0 \cap J_{T_2}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^0 \cap J_{T_2}$.

3) если $c_{i_l}^1 = c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 = b_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^0 \cap J_{T_2}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^0 \cap J_{T_2}$.

4) если выполняется одно из трех предыдущих условий, но $j \notin J_1^0 \cap J_{T_2}$ и $j \notin J_2^0 \cap J_{T_2}$, то тогда $j \in J_{nd}$, где J_{nd} – множество абонентов, которые равнозначно могут выбрать услуги как одной из сравниваемых фирм, так и услуги другой.

Для абонента $j \in J \cap J_{T_1}$ будем говорить, что пара $\left(c_{i_l}^1, i_l\right)$ предпочтительнее, чем пара $\left(c_{i_l}^2, i_p\right)$, т.е. $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $v_{i_l}^1 > v_{i_p}^2$;
2) $c_{i_l}^1 = c_{i_p}^2$ и $v_{i_l}^1 > v_{i_p}^2$;
3) $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $v_{i_l}^1 = v_{i_p}^2$.

Для остальных случаев:

1) если $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $v_{i_l}^1 < v_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^0 \cap J_{T_1}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^0 \cap J_{T_1}$.

2) если $c_{i_l}^1 > c_{i_p}^2$ и $v_{i_l}^1 > v_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^0 \cap J_{T_1}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^0 \cap J_{T_1}$.

3) если $c_{i_l}^1 = c_{i_p}^2$ и $v_{i_l}^1 = v_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^0 \cap J_{T_1}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^0 \cap J_{T_1}$.

4) если выполняется одно из трех предыдущих условий, но $j \notin J_1^0 \cap J_{T_1}$ и $j \notin J_2^0 \cap J_{T_1}$, то тогда $j \in J_{nd}$, где J_{nd} – множество абонентов, которые равнозначно могут выбрать услуги как одной из сравниваемых фирм, так и услуги другой.

Далее мы смотрим, если $|J_{nd}| = 2k$, где $k \in Z$, то половина абонентов из J_{nd} выбирает фирму F_1, а вторая половина – фирму F_2. Если $|J_{nd}| = 2k + 1$, где $k \in Z$, то фирму F_1 (фирму с более высоким рыночным положением) выбирает на одного абонента $j \in J_{nd}$ больше.

Для определения предпочтительности услуг, предлагаемых фирмами F_2 и F_3, действуем аналогично.

Для определения предпочтительности услуг, которые предлагают фирмы F_1 и F_3, действуем аналогично.

Сначала абонент выбирает две из трех фирм для сравнения их услуг на предпочтительность, основываясь на показателе $\frac{c_i^k}{v_i^k}$ для абонентов $j \in J \cap J_{T_1}$ и величине $\frac{c_i^k}{b_i^k}$ для абонентов $j \in J \cap J_{T_2}$. Он выбирает те две фирмы, для которых этот показатель меньше. Здесь стоит отметить, что при сравнении фирмы-лидера и фирмы-претендента абонент сравнивает соответствующие величины для одной выбранной каждым игроком стратегии, т.к. на первом шаге игры разыгрывается биматричная игра между фирмой-лидером и фирмой-претендентом. Для третьей же фирмы абонент сравнивает все возможные стратегии, так как фирма-последователь может выбрать любую из них, и, если для всех из теоретически возможных стратегий оказывается, что величина $\frac{c_i^k}{v_i^k}$ для абонентов $j \in J \cap J_{T_1}$ и показатель $\frac{c_i^k}{b_i^k}$ для абонентов $j \in J \cap J_{T_2}$, соответственно, оказывается не самой большой, то фирма-последователь становится одной из двух фирм, услуги которых сравнивает на предпочтительность абонент j.

Введем функцию-переключения $V_j\left(s_k^{i_r}\right)$.

$$V_j\left(s_k^{i_r}\right) = \begin{cases} 1, \text{если } i_r \text{ предпочтительная услуга для абонента } j, \\ 0, \text{в противном случае,} \end{cases}$$

т.е. функция характеризует предпочтительность для абонента $j \in J$ услуги $i_r \in I_k$, предлагаемой игроком F_k, по сравнению со всеми прочими видами услуг, которые предложены на рынке. Для постоянных абонентов, т.е. для $j \in J \cap J_P$:

$$V_j\left(s_k^i\right) = 1 \text{ для всех } i \in I_k,\ k \in \{1, 2, 3\}.$$

Предполагаем, что услуги выбираются абонентом на месяц вперед. Введем величину $g_j(s_k^{i_r}) = (c_{i_r}^k - a_{i_r})$, которая характеризует прибыль фирмы F_k от абонента j при использовании этой фирмой стратегии $s_k^{i_r}$. Услугу i_r, в рамках которой оператор предлагает больший объем интернет-трафика обозначим за i_r^{gb}, а услугу, в рамках которой оператор предлагает большее количество минут для исходящих звонков – за i_r^{mnt}. Учитывая предположение 6, получаем следующее неравенство

$$g_j\left(s_k^{i_r^{gb}}\right) \geq g_j\left(s_k^{i_r^{mnt}}\right) > 0,$$

для $k \in \{1,2,3\}$, $i_r \in I_k$, $j \in J$.

Обозначим за $G_k(s_k^{i_r})$ суммарную прибыль фирмы k от абонентов $j \in J_P \cap J_k^0$, выбравших услугу i_r, т.е.

$$G_k\left(s_k^{i_r}\right) = \sum_{j \in J_P \cap J_k^0} g_j\left(s_k^{i_r}\right),$$

где $k \in \{1,2,3\}$ и $i_r \in I_k$. Тогда функцию выигрыша для фирмы-лидера можно записать следующим образом:

$$H_1\left(s_1^{i_l}, s_2^{i_p}, J^0\right) = -f_1 + \sum_{j \in J_T \cap J^0} g_j\left(s_1^{i_l}\right) \times V_j\left(s_1^{i_l}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{i_p}\right)\right) + G_1\left(s_1^{i_l}\right),$$

где $i_l \in I_1, i_p \in I_2$.

Функция выигрыша фирмы-лидера выражает величину прибыли с учетом изменения доходов за счет потери и приобретения абонентов.

Введем функцию выигрыша для фирмы-претендента:

$$H_2\left(s_1^{i_l}, s_2^{i_p}, J^0\right) = -f_2 + \sum_{j \in J_T \cap J^0} g_j\left(s_2^{i_p}\right) \times V_j\left(s_2^{i_p}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{i_l}\right)\right) + G_2\left(s_2^{i_p}\right),$$

где $i_l \in I_1, i_p \in I_2$.

Функция выигрыша фирмы-претендента выражает величину прибыли с учетом изменения доходов за счет потери и приобретения абонентов.

Введем функцию выигрыша для фирмы-последователя:

$$H_3\left(s_1^{i_l}, s_2^{i_p}, s_3^{i_s}, J^0\right) = -f_3 + \sum_{j \in J_T \cap J^0} g_j\left(s_3^{i_s}\right) \times V_j\left(s_3^{i_s}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{i_l}\right)\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{i_p}\right)\right) + G_3\left(s_3^{i_s}\right),$$

где $i_l \in I_1, i_p \in I_2, i_s \in I_3$.

Функция выигрыша фирмы-последователя выражает суммарную прибыль этого игрока с учетом изменения доходов за счет потери и приобретения абонентов.

$$V_j\left(s_1^{i_l}\right) + V_j\left(s_2^{i_p}\right) + V_j\left(s_3^{i_s}\right) \leq 1,\ i_l \in I_1, i_p \in I_2, i_s \in I_3, j \notin J_{nd}. \qquad (2)$$

Неравенство (2) показывает, что у абонента $j \notin J_{nd}$ не может быть две услуги, которые являются для него одновременно наиболее предпочтительными по сравнению друг с другом. Для абонентов $j \in J_{nd}$, вообще говоря, такой ситуации тоже быть не может, поскольку фактически согласно условию 4 из блока «остальные случаи» при определении предпочтительности услуг, абонент $j \in J_{nd}$ выбирает только одну фирму.

Будем считать, что «лидер» в игре определяется количеством абонентов, имеющихся у фирмы в начале игры. В конце игры, в случае равенства числа абонентов у нескольких фирм, фирма-лидер определяется величиной суммарной прибыли.

Поскольку при прочих равных условиях, фирма-последователь может как подыгрывать фирме-лидеру, так и подыгрывать фирме-претенденту, для определенности будем считать, что игрок F_3 подыгрывает игроку F_1.

Таким образом, конкурентная борьба на рынке телекоммуникационных услуг может быть формализована в виде неантагонистической игры Г:

$$\Gamma =< N, S_1,\ S_2,\ S_3, H_1, H_2, H_3 >.$$

Как проходит игра?

1. Сначала фирма-лидер F_1 и фирма-претендент F_2 на первом шаге игры выдвигают свои тарифы (услуги), т.е. выбирают стратегии, в соответствии с которыми они действуют. Таким образом, предварительно два игрока разыгрывают между собой неантагонистическую биматричную игру.
2. На следующем шаге с учетом выбора игроков F_1 и F_2 свое решение принимает фирма-последователь – игрок F_3.
3. Каждый игрок стремится максимизировать свою функцию выигрыша.

Схематично игра в развернутой форме для одноэтапного случая, когда множество стратегий каждого игрока содержит по 2 стратегии, представлена на рисунке 1.

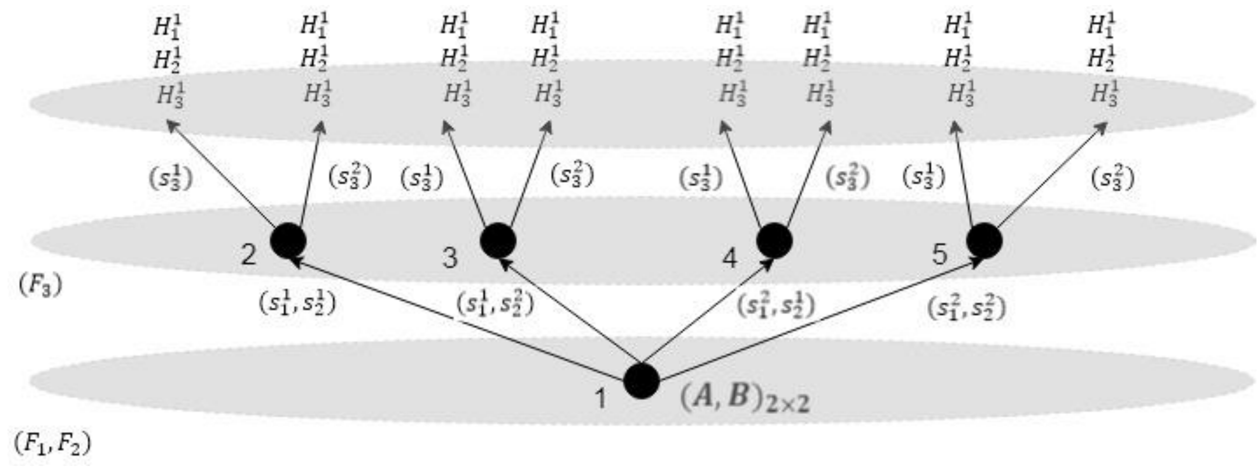

Рис. 1. Игра в развернутой форме.

Поясним игру, изображенную на рисунке 1. В позиции 1 фирма-лидер F_1 и фирма-претендент F_2 выбирают по одной из двух своих стратегий, действуя одновременно и независимо друг от друга, разыгрывая биматричную игру. В позициях 2, 3, 4, 5 в зависимости от выбора игроков F_1 и F_2 свой выбор делает фирма-последователь – игрок F_3, который может выбрать либо стратегию s_3^1, либо стратегию s_3^2. При этом, в случае, если обе эти стратегии дают ему одинаковый выигрыш, при выборе своей стратегии этот игрок подыгрывает фирме-лидеру.

2.2. Построение абсолютного равновесия по Нэшу

Для начала сделаем предположение, согласно которому для стратегий одного типа в рамках одного и того же игрока величина $g_j(s_k^{i_r})$ будет больше для той стратегии $s_k^{i_r}$, для которой больше объем предоставляемой услуги, то есть, если i_1и i_2 – «интернет» тарифы, то величина $g_j(s_k^{i_1})$ будет больше, при условии, что услуга i_1 предлагает больший по объему пакет интернет-трафика. Это объясняется тем, что при увеличении объема услуги, цена на нее растет, при этом удельные затраты согласно предположению 7 для услуг одного типа одинаковы.

Пусть множество стратегий фирмы F_1 равно $S_1 = \{s_1^1, \dots, s_1^m\}$, фирмы F_2 равно $S_2 = \{s_2^1, \dots, s_2^n\}$, а фирмы F_3 равно $S_3 = \{s_3^1, \dots, s_3^x\}$.

Пусть имеется матрица выигрышей $(A, B)_{m\times n}$ для фирм F_1 и F_2.

Начнем поиск абсолютного равновесия по Нэшу с конца игры. Предположим, что игроки F_1 и F_2 выбрали фиксированные стратегии $(s_1^{*l},\ s_2^{*p})$ и уже разыграли первый шаг игры.

Сравним 2 произвольные стратегии $s_3^{i_1}$ и $s_3^{i_2}$ фирмы F_3, а также функцию выигрыша для этих стратегий:

$$H_3\left(s_1^{*l}, s_2^{*p}, s_3^{i_1}, J_0\right) = -f_3 + \sum_{j\in J_T\cap J^0} g_j\left(s_3^{i_1}\right)\times V_j\left(s_3^{i_1}\right)\times\left(1-V_j\left(s_1^{*l}\right)\right)\times\left(1-V_j\left(s_2^{*p}\right)\right) + G_3\left(s_3^{i_1}\right), \qquad (3)$$

$$H_3\left(s_1^{*l}, s_2^{*p}, s_3^{i_2}, J_0\right) = -f_3 + \sum_{j\in J_T\cap J^0} g_j\left(s_3^{i_2}\right)\times V_j\left(s_3^{i_2}\right)\times\left(1-V_j\left(s_1^{*l}\right)\right)\times\left(1-V_j\left(s_2^{*p}\right)\right) + G_3\left(s_3^{i_2}\right), \qquad (4)$$

где:

$$G_3\left(s_3^{i_1}\right) = \sum_{j\in J_P\cap J_3^0} g_j\left(s_3^{i_1}\right),$$

$$G_3\left(s_3^{i_2}\right) = \sum_{j\in J_P\cap J_3^0} g_j\left(s_3^{i_2}\right).$$

Пусть множество $J_P \cap J_3^0$ содержит w_3 абонентов, тогда перепишем предыдущие условия в виде:

$$G_3\left(s_3^{i_1}\right) = w_3 \times g_{j\in J_P\cap J_3^0}\left(s_3^{i_1}\right),$$

$$G_3\left(s_3^{i_2}\right) = w_3 \times g_{j\in J_P\cap J_3^0}\left(s_3^{i_2}\right),$$

где $w_3 > 0$.

Тогда получаем, что для того, чтобы стратегия $s_3^{i_1}$ была не хуже для игрока F_3, чем стратегия $s_3^{i_2}$, требуется, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\sum_{j\in J_T\cap J^0} g_j\left(s_3^{i_1}\right) \times V_j\left(s_3^{i_1}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{*l}\right)\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{*p}\right)\right) + w_3 \times g_{j\in J_P\cap J_3^0}\left(s_3^{i_1}\right)$$
$$- \sum_{j\in J_T\cap J^0} g_j\left(s_3^{i_2}\right) \times V_j\left(s_3^{i_2}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{*l}\right)\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{*p}\right)\right)$$
$$- w_3 \times g_{j\in J_P\cap J_3^0}\left(s_3^{i_2}\right) \geq 0. \qquad (5)$$

Преобразуем выражение (5):

$$g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_3^{i_1}\right) \times \left(\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_3^{i_1}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{*l}\right)\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{*p}\right)\right)\right)$$
$$+ w_3 \times g_{j\in J_P\cap J_3^0}\left(s_3^{i_1}\right) - g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_3^{i_2}\right) \times$$
$$\times \left(\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_3^{i_2}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{*l}\right)\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{*p}\right)\right)\right)$$
$$- w_3 \times g_{j\in J_P\cap J_3^0}\left(s_3^{i_2}\right) \geq 0. \qquad (6)$$

Отметим, что $g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_3^{i_1}\right) = g_{j\in J_P\cap J_3^0}\left(s_3^{i_1}\right)$ и $g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_3^{i_2}\right) = g_{j\in J_P\cap J_3^0}\left(s_3^{i_2}\right)$, поскольку величина g_j не зависит от множества, которому принадлежит абонент j, а зависит только от стратегии игрока (выбираемой услуги).

Введем следующие обозначения:

$$g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_3^{i_1}\right) = g\left(s_3^{i_1}\right),$$

$$g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_3^{i_2}\right) = g\left(s_3^{i_2}\right).$$

Тогда выражение (6) может быть записано в виде:

$$g\left(s_3^{i_1}\right) \times \left(\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_3^{i_1}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{*l}\right)\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{*p}\right)\right) + w_3\right) \geq$$

$$\geq g\left(s_3^{i_2}\right) \times \left(\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_3^{i_2}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{*l}\right)\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{*p}\right)\right) + w_3\right).$$

Учитывая, что $g\left(s_3^{i_2}\right) > 0$, $w_3 > 0$ и $\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_3^{i_1}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{*l}\right)\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{*p}\right)\right) \geq 0$, получим, что стратегия $s_3^{i_1}$ выгоднее для игрока F_3, когда выполнено следующее условие:

$$\frac{g\left(s_3^{i_1}\right)}{g\left(s_3^{i_2}\right)} \geq \frac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_3^{i_2}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{*l}\right)\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{*p}\right)\right) + w_3}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_3^{i_1}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{*l}\right)\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{*p}\right)\right) + w_3}. \quad (7)$$

Далее рассмотрим две произвольные стратегии $s_1^{i_1}$ и $s_1^{i_2}$ игрока F_1, а также функцию выигрыша для них. Пусть игрок F_2 при этом использует фиксированную стратегию s_2^{*p}. Запишем функции выигрыша первого игрока для стратегий $s_1^{i_1}$ и $s_1^{i_2}$.

$$H_1\left(s_1^{i_1}, s_2^{*p}, J^0\right) = -f_1 + \sum_{j\in J_T\cap J^0} g_j\left(s_1^{i_1}\right) \times V_j\left(s_1^{i_1}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{*p}\right)\right) + G_1\left(s_1^{i_1}\right), \quad (8)$$

$$H_1\left(s_1^{i_2}, s_2^{*p}, J^0\right) = -f_1 + \sum_{j\in J_T\cap J^0} g_j\left(s_1^{i_2}\right) \times V_j\left(s_1^{i_2}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{*p}\right)\right) + G_1\left(s_1^{i_2}\right), \quad (9)$$

где

$$G_1\left(s_1^{i_1}\right) = \sum_{j \in J_P \cap J_1^0} g_j\left(s_1^{i_1}\right),$$

$$G_1\left(s_1^{i_2}\right) = \sum_{j \in J_P \cap J_1^0} g_j\left(s_1^{i_2}\right).$$

Пусть множество $J_P \cap J_1^0$ состоит из w_1 абонентов, тогда предыдущие два выражения можно записать в виде:

$$G_1\left(s_1^{i_1}\right) = w_1 \times g_{j \in J_P \cap J_1^0}\left(s_1^{i_1}\right),$$

$$G_1\left(s_1^{i_2}\right) = w_1 \times g_{j \in J_P \cap J_1^0}\left(s_1^{i_2}\right),$$

где $w_1 > 0$.

Таким образом, для того, чтобы стратегия $s_1^{i_1}$ была не хуже для игрока F_1, по сравнению со стратегией $s_1^{i_2}$ требуется, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\sum_{j \in J_T \cap J^0} g_j\left(s_1^{i_1}\right) \times V_j\left(s_1^{i_1}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{p*}\right)\right) + w_1 \times g_{j \in J_P \cap J_1^0}\left(s_1^{i_1}\right) - \sum_{j \in J_T \cap J^0} g_j\left(s_1^{i_2}\right) \times V_j\left(s_1^{i_2}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{p*}\right)\right) - w_1 \times g_{j \in J_P \cap J_1^0}\left(s_1^{i_2}\right) \geq \geq 0. \qquad (10)$$

Преобразуем неравенство (10):

$$g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_1^{i_1}\right)\times\left(\sum_{j\in J_T\cap J^0}V_j\left(s_1^{i_1}\right)\times\left(1-V_j\left(s_2^{p*}\right)\right)\right)+w_1\times g_{j\in J_P\cap J_1^0}\left(s_1^{i_1}\right)$$
$$-\,g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_1^{i_2}\right)\times\left(\sum_{j\in J_T\cap J^0}V_j\left(s_1^{i_2}\right)\times\left(1-V_j\left(s_2^{p*}\right)\right)\right)$$
$$-\,w_1\times g_{j\in J_P\cap J_1^0}\left(s_1^{i_2}\right)>0, \qquad (11)$$

где

$$g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_1^{i_1}\right)=g_{j\in J_P\cap J_1^0}\left(s_1^{i_1}\right),$$

$$g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_1^{i_2}\right)=g_{j\in J_P\cap J_1^0}\left(s_1^{i_2}\right),$$

поскольку величина g_j не зависит от множества, которому принадлежит абонент j, а зависит только стратегии.

Введем следующие обозначения:

$$g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_1^{i_1}\right)=g\left(s_1^{i_1}\right),$$

$$g_{j\in J_T\cap J^0}\left(s_1^{i_2}\right)=g\left(s_1^{i_2}\right),$$

тогда (11) можно записать в виде:

$$g\left(s_1^{i_1}\right)\times\left(\sum_{j\in J_T\cap J^0}V_j\left(s_1^{i_1}\right)\times\left(1-V_j\left(s_2^{*p}\right)\right)+w_1\right)\geq$$
$$\geq g\left(s_1^{i_2}\right)\times\left(\sum_{j\in J_T\cap J^0}V_j\left(s_1^{i_2}\right)\times\left(1-V_j\left(s_2^{*p}\right)\right)+w_1\right).$$

Учитывая, что $g\left(s_1^{i_2}\right)>0$, $w_1>0$ и $\sum_{j\in J_T\cap J^0}V_j\left(s_2^{i_1}\right)\times\left(1-V_j\left(s_1^{*l}\right)\right)\geq 0$, получим условие, при котором стратегия $s_1^{i_1}$ выгоднее для игрока F_1, чем стратегия $s_1^{i_2}$:

$$\frac{g\left(s_1^{i_1}\right)}{g\left(s_1^{i_2}\right)} \geq \frac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_1^{i_2}\right)\times\left(1-V_j\left(s_2^{*p}\right)\right)+w_1}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_1^{i_1}\right)\times\left(1-V_j\left(s_2^{*p}\right)\right)+w_1}. \qquad (12)$$

Далее рассмотрим две произвольные стратегии игрока F_2 – $s_2^{i_1}$ и $s_2^{i_2}$, а также функцию выигрыша для этих стратегий. Пусть игрок F_1 при этом использует свою фиксированную стратегию s_1^{*l}. Проводя размышления, аналогичные случаю для фирмы F_1, получаем условие, при котором стратегия $s_2^{i_1}$ будет выгоднее для игрока F_2, чем стратегия $s_2^{i_2}$.

$$\frac{g\left(s_2^{i_1}\right)}{g\left(s_2^{i_2}\right)} > \frac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_2^{i_2}\right)\times\left(1-V_j\left(s_1^{*l}\right)\right)+w_2}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_2^{i_1}\right)\times\left(1-V_j\left(s_1^{*l}\right)\right)+w_2}, \qquad (13)$$

где $g\left(s_2^{i_2}\right) > 0$, $w_2 > 0$ и $\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_2^{i_1}\right)\times\left(1-V_j\left(s_1^{*l}\right)\right) \geq 0$.

Таким образом, в неантагонистической игре $\Gamma =< N, S_1,\ S_2,\ S_3, H_1, H_2, H_3 >$, стратегии игроков s_1^*, s_2^*, s_3^* приводят к абсолютному равновесию по Нэшу в двухшаговой одноэтапной игре, если выполняется следующая система неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{g(s_1^*)}{g\left(s_1^{i_2}\right)} \geq \dfrac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_1^{i_2}\right)\times\left(1-V_j(s_2^*)\right)+w_1}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_1^*)\times\left(1-V_j(s_2^*)\right)+w_1} \\ \dfrac{g(s_2^*)}{g\left(s_2^{i_2}\right)} \geq \dfrac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_2^{i_2}\right)\times\left(1-V_j(s_1^*)\right)+w_2}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_2^*)\times\left(1-V_j(s_1^*)\right)+w_2} \\ \dfrac{g(s_3^*)}{g\left(s_3^{i_2}\right)} \geq \dfrac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_3^{i_2}\right)\times\left(1-V_j(s_1^*)\right)\times\left(1-V_j(s_2^*)\right)+w_3}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_3^*)\times\left(1-V_j(s_1^*)\right)\times\left(1-V_j(s_2^*)\right)+w_3} \end{cases}, \qquad (14)$$

для $\forall\ s_1^{i_2} \in \{S_1\}$, $\forall\ s_2^{i_2} \in \{S_2\}$, $\forall\ s_3^{i_2} \in \{S_3\}$,

где $w_k = \left|J_P \cap J_k^0\right|, k \in \{1, 2, 3\}$.

Эту систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} g(s_1^*) \geq \dfrac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_1^{i_2}\right)\times\left(1-V_j(s_2^*)\right)+w_1}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_1^*)\times\left(1-V_j(s_2^*)\right)+w_1}\times g\left(s_1^{i_2}\right) \\ g(s_2^*) \geq \dfrac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_2^{i_2}\right)\times\left(1-V_j(s_1^*)\right)+w_2}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_2^*)\times\left(1-V_j(s_1^*)\right)+w_2}\times g\left(s_2^{i_2}\right) \\ g(s_3^*) \geq \dfrac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_3^{i_2}\right)\times\left(1-V_j(s_1^*)\right)\times\left(1-V_j(s_2^*)\right)+w_3}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_3^*)\times\left(1-V_j(s_1^*)\right)\times\left(1-V_j(s_2^*)\right)+w_3}\times g\left(s_3^{i_2}\right) \end{cases},$$

для $\forall\, s_1^{i_2} \in \{S_1\}$, $\forall\, s_2^{i_2} \in \{S_2\}$, $\forall\, s_3^{i_2} \in \{S_3\}$,

где $w_k = \left|J_P \cap J_k^0\right|, k \in \{1,2,3\}$.

2.3. Формулировка теоремы

Оформим полученные теоретические результаты в виде теоремы.

Теорема.

В неантагонистической двухшаговой игре $\Gamma =< N, S_1, S_2, S_3, H_1, H_2, H_3 >$ стратегии s_1^*, s_2^*, s_3^* приводят к ситуации, являющейся ситуацией абсолютного равновесия по Нэшу, если одновременно выполняются следующие неравенства:

$$g(s_1^*) \geq \frac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_1^{i_2}\right)\times\left(1-V_j(s_2^*)\right)+w_1}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_1^*)\times\left(1-V_j(s_2^*)\right)+w_1}\times g\left(s_1^{i_2}\right),$$

$$g(s_2^*) \geq \frac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j\left(s_2^{i_2}\right)\times\left(1-V_j(s_1^*)\right)+w_2}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_2^*)\times\left(1-V_j(s_1^*)\right)+w_2}\times g\left(s_2^{i_2}\right),$$

$$g(s_3^*) \geq \frac{\sum_{j \in J_T \cap J^0} V_j\left(s_3^{i_2}\right) \times \left(1 - V_j(s_1^*)\right) \times \left(1 - V_j(s_2^*)\right) + w_3}{\sum_{j \in J_T \cap J^0} V_j(s_3^*) \times \left(1 - V_j(s_1^*)\right) \times \left(1 - V_j(s_2^*)\right) + w_3} \times g\left(s_3^{i_2}\right),$$

для $\forall\, s_1^{i_2} \in \{S_1\}, \forall\, s_2^{i_2} \in \{S_2\}, \forall\, s_3^{i_2} \in \{S_3\}$,

где $w_k = \left| J_P \cap J_k^0 \right|, k \in \{1, 2, 3\}$.

Доказательство.

Доказательство теоремы следует из построения.

Замечание.

Можно заметить, что отношение прибыли от использования стратегии (услуги), приводящей к ситуации абсолютного равновесия по Нэшу в игре Г для игрока k, к величине прибыли от использования им любой другой стратегии должно быть не меньше величины, равной отношению количества всех абонентов, выбравших услуги данного игрока при использовании им любой другой стратегии, к количеству всех абонентов, выбравших игрока при использовании им стратегии, приводящей к ситуации абсолютного равновесия по Нэшу.

2.4. Апробация результатов на данных мобильных операторов по РФ

В данном параграфе мы рассмотрим финансовые показатели четырех крупнейших телекоммуникационных операторов: ПАО «МТС», ПАО «МегаФон», ПАО «ВымпелКом», ООО «ТЕЛЕ2», определим среди них фирму-лидера, фирму-претендента и фирму-последователя. Далее, принимая во внимание результаты SWOT-анализа, построим пример и рассчитаем его.

Для начала рассмотрим результаты SWOT-анализа. Для определения игроков будем рассматривать четырех крупнейших операторов мобильной связи в Российской Федерации: ПАО «МТС», ПАО «МегаФон», ПАО «ВымпелКом» («Билайн») и ООО «ТЕЛЕ2». В таблице 1 представлены сравнительные сведения по распределению количества абонентов, выручки и чистой прибыли среди указанных участников телекоммуникационного рынка.

Наименование компании	**Количество абонентов в РФ за 1 квартал 2016 года (млн чел.)**	**Выручка за 2016 год (млрд руб.)**	**Прибыль за 2016 (млрд руб.)**
ПАО «МТС»	77,3	400,6	48,5
ПАО «МегаФон»	75,6	316,3	25,6
ПАО «ВымпелКом»	57	355,9	12,7
ООО «ТЕЛЕ2»	38,9	105,9	-15,6

Таблица 1. Сравнительные показатели телеком компаний.

Стоит отметить, что данные по компании «ТЕЛЕ2» являются прогнозными, поскольку, начиная с 2016 года, данные по этому оператору мобильной связи в свободном доступе не представлены.

Принимая во внимание таблицу 1, в качестве фирмы-лидера выберем ПАО «МТС», в качестве фирмы-претендента – ПАО «МегаФон», в качестве фирмы-последователя – ООО «ТЕЛЕ2».

В таблицах 2-5 представлены результаты SWOT-анализа для четырех крупнейших операторов рынка телекоммуникационных услуг. По умолчанию было решено включить в каждую из областей анализа не более 3 факторов, которые могут оказывать влияние на стратегии игроков.

Сильные стороны (Strengths)	Возможности (Opportunities)
1) Лидер рынка 2) Высокая гибкость тарифных планов 3) Самая большая зона покрытия сети (территория проживания 92% населения России)	1) Сотрудничество с небольшими участниками рынка 2) Повышение уровня доходов населения 3) Изменение приоритетов в услугах у абонентов
Слабые стороны (Weaknesses)	**Угрозы (Threats)**
1) Более высокие накладные расходы по сравнению с конкурентами в следствии большего числа персонала 2) Более высокая эксплуатационная стоимость оборудования 3) Отсутствие явных преимуществ перед конкурентами	1) Увеличение зоны покрытия сети у конкурентов 2) Снижение стоимости услуг у конкурентов 3) Снижение уровня доходов населения

Таблица 2. SWOT-таблица ПАО «МТС»

Сильные стороны (Strengths)	Возможности (Opportunities)
1) Первыми выделили инновационную разработку в отдельное подразделение 2) Ориентированность на различные слои населения 3) Стабильная зона покрытия в крупных населенных пунктах	1) Повышение уровня доходов населения 2) Увеличение зоны покрытия сети 3) Снижение себестоимости услуг за счет снижения стоимости сетевого оборудования
Слабые стороны (Weaknesses)	**Угрозы (Threats)**
1) Высокая стоимость услуг 2) Невысокое качество услуг в отдаленных регионах по сравнению с главным конкурентом 3) Низкое число центров обслуживания в регионах России	1) Снижение стоимости услуг у конкурентов 2) Снижение уровня доходов населения 3) Непринятие абонентами разработанных инновационных продуктов

Таблица 3. SWOT-таблица ПАО «МегаФон»

Сильные стороны (Strengths)	Возможности (Opportunities)
1) Большая сеть торговых представителей 2) Большее разнообразие тарифных планов 3) Запуск платформы Telecom API, нацеленной на предпринимателей	1) Снижение стоимости услуг за счет снижения количества торгового персонала 2) Повышение уровня доходов населения 3) Сотрудничество с лидерами рынка
Слабые стороны (Weaknesses)	**Угрозы (Threats)**
1) Непрозрачность условий и начислений 2) Отсутствие явных ценовых преимуществ перед конкурентами 3) Высокие расходы на персонал в виду большого количества торговых представителей	1) Повышение конкуренции со стороны более бюджетных операторов 2) Снижение уровня доходов населения 3) Снижение доходов в силу невозможности расширения абонентской базы

Таблица 4. SWOT-таблица ПАО «ВымпелКом»

Сильные стороны (Strengths)	Возможности (Opportunities)
1) Более низкие фиксированные траты на услуги 2) Небольшая сеть торговых представителей, что снижает накладные расходы 3) Самые гибкие условия предоставления услуг	1) Увеличение числа регионов, в которых представлена компания 2) Сотрудничество с другими телекоммуникационными компаниями по вопросам инноваций 3) Привлечение клиентов за счет еще более гибких условий тарифов с возможностью персонализации тарифного плана.
Слабые стороны (Weaknesses)	**Угрозы (Threats)**
1) Наименее крупная зона покрытия по сравнению с конкурентами 2) Низкое качество услуг 3) Бренд представлен в ограниченном числе регионов	1) Потеря абонентов в силу низкого качества услуг 2) Потеря инвесторов в силу убыточности компании 3) Отсутствие готовых к сотрудничеству и обмену опытом компаний

Таблица 5. SWOT-таблица ООО «ТЕЛЕ2»

Данные результаты учтены при определении множеств стратегий игроков и цен на них в примере, рассмотренном в следующем параграфе. Например, фиксированные затраты фирмы-лидера самые высокие, а гибкость тарифов больше, что проявляется в том, что один из предлагаемых этой фирмой в примере тарифов является самым дешевым среди всех на рынке, а второй стоит чуть выше средней цены по рынку.

2.5. Пример одноэтапной двухшаговой игры

Принимая во внимание некоторые результаты SWOT-анализа, которые могут проявляться в виде определенного объема услуг и цен на них, определим стратегии игроков.

Для начала предположим, что $I_1 = \{1, 2\}$, $I_2 = \{3, 4\}$, $I_3 = \{5, 6\}$.

Тариф 1 содержит 200 минут исходящих звонков, 2 Гигабайта интернет трафика. Фиксированные затраты f_1^1 равны 70, удельные затраты a_1 равны 60.

Тариф 2 содержит 100 минут исходящих звонков, 6 Гигабайт интернет трафика. Фиксированные затраты f_2^1 равны 70, удельные затраты a_2 равны 50.

Тариф 3 содержит 200 минут исходящих звонков, 3 Гигабайта интернет трафика. Фиксированные затраты f_3^2 равны 60, удельные затраты a_3 равны 70.

Тариф 4 содержит 150 минут исходящих звонков, 5 Гигабайт интернет трафика. Фиксированные затраты f_4^2 равны 60, удельные затраты a_4 равны 60.

Тариф 5 содержит 150 минут исходящих звонков, 4 Гигабайта интернет трафика. Фиксированные затраты f_5^3 равны 50, удельные затраты a_5 равны 70.

Тариф 6 содержит 100 минут исходящих звонков, 7 Гигабайт интернет трафика. Фиксированные затраты f_6^3 равны 50, удельные затраты a_6 равны 60.

Т.е. размеры фиксированных затрат учитывают тот фактор, что для лидирующих компаний они больше ввиду, например, большего числа персонала, а величина удельных затрат отражает тот факт, что с ростом числа абонентов этот показатель уменьшается в расчете на единицу предлагаемой услуги.

Пусть $J = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,11,12,13,14, 15, 16, 17\}$. Разобьём J_T на J_{T_1}, J_{T_2}. В J_{T_1} входят те абоненты, для которых определяющим фактором при выборе оператора помимо цены является количество минут в месяц на исходящие телефонные звонки, предоставляемые в рамках выбранного тарифа. В J_{T_2} входят абоненты, для которых наравне с ценой важен объем месячного интернет-трафика. Таким образом, $J_{T_1} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $J_{T_2} = \{6, 7, 8, 9\}$.

В множество J_P входят абоненты 10, 11, 12, 13 14, 15, 16, 17. Пусть $J_1^0 \cap J_P = \{10, 11, 12, 13\}, J_2^0 \cap J_P = \{14, 15, 16\}, J_3^0 \cap J_P = \{17\}$.

Предположим, что $J_1^0 \cap J_T = \{1, 4, 6, 9\}$, $J_2^0 \cap J_T = \{2, 5, 7\}$, $J_3^0 \cap J_T = \{3, 8\}$.

Перейдем к множествам стратегий: $S_1 = \{s_1^1, s_1^2\}$, $S_2 = \{s_2^1, s_2^2\}$, $S_3 = \{s_3^1, s_3^2\}$. $s_1^1 = (300{,}1)$, $s_1^2 = (330{,}2)$, $s_2^1 = (310{,}3)$, $s_2^2 = (320{,}4)$, $s_3^1 = (320{,}5)$, $s_3^2 = (340{,}6)$.

Вычислим выигрыши игроков при использовании различных стратегий.

Случай 1: игрок F_1 использует стратегию s_1^1, игрок $F_2 - s_2^1$, игрок $F_3 - s_3^1$. Определим, услуги каких двух фирм абоненты $j \in J \cap J_{T_1}$ и $j \in J \cap J_{T_2}$ будут сравнивать на предпочтительность. Для этого вычислим величины, характеризующие отношение стоимость услуг к их объему. Для абонентов $j \in J \cap J_{T_1}$: у игрока $F_1 - \frac{300}{200}$; у игрока $F_2 - \frac{310}{200}$; у игрока $F_3 - \frac{320}{150}$, либо $\frac{340}{100}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_1}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и второго игроков. Аналогично для абонентов $j \in J \cap J_{T_2}$: у игрока F_1 – $\frac{300}{2}$; у игрока $F_2 - \frac{310}{3}$; у игрока $F_3 - \frac{320}{4}$, либо $\frac{340}{7}$. Таким образом, абоненты

$j \in J \cap J_{T_2}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги второго и третьего игроков. Тогда $H_1(s_1^1, s_2^1) = 2090$, $H_2(s_1^1, s_2^1) = 1140$, $H_3(s_1^1, s_2^1, s_3^1) = 700$, так как первого игрока выберут абоненты 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13; второго игрока – абоненты 6, 8, 14, 15, 16; третьего игрока – абоненты 7, 9, 17.

Случай 2: игрок F_1 использует стратегию s_1^2, игрок $F_2 - s_2^1$, игрок $F_3 - s_3^1$. Аналогично первому случаю вычислим величины, характеризующие отношение стоимости услуг к их объему. Для абонентов $j \in J \cap J_{T_1}$: у игрока $F_1 - \frac{330}{100}$; у игрока $F_2 - \frac{310}{200}$; у игрока $F_3 - \frac{320}{150}$, либо $\frac{340}{100}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_1}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и второго игроков. Аналогично для абонентов $j \in J \cap J_{T_2}$: у игрока $F_1 - \frac{330}{6}$; у игрока $F_2 - \frac{310}{3}$; у игрока $F_3 - \frac{320}{4}$, либо $\frac{340}{7}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_2}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и третьего игроков. Тогда $H_1(s_1^2, s_2^1) = 1610$, $H_2(s_1^2, s_2^1) = 1860$, $H_3(s_1^2, s_2^1, s_3^1) = 700$, так как первого игрока выберут абоненты 7, 8, 10, 11, 12, 13; второго игрока – абоненты 1, 2, 3, 4, 5, 14, 15, 16; третьего игрока – абоненты 6, 9, 17.

Случай 3: игрок F_1 использует стратегию s_1^1, игрок $F_2 - s_2^2$, игрок $F_3 - s_3^1$. Аналогично первому случаю вычислим величины, характеризующие отношение стоимости услуг к их объему. Для абонентов $j \in J \cap J_{T_1}$: у игрока $F_1 - \frac{300}{200}$; у игрока $F_2 - \frac{320}{150}$; у игрока $F_3 - \frac{320}{150}$, либо $\frac{340}{100}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_1}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и второго игроков. Аналогично для абонентов $j \in J \cap J_{T_2}$: у игрока $F_1 - \frac{300}{2}$; у игрока $F_2 - \frac{320}{5}$; у игрока $F_3 - \frac{320}{4}$, либо $\frac{340}{7}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_2}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги второго и третьего игроков. Тогда $H_1(s_1^1, s_2^2) = 2090$, $H_2(s_1^1, s_2^2) = 1760$, $H_3(s_1^1, s_2^2, s_3^1) = 200$, так как первого игрока выберут абоненты 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13; второго игрока – абоненты 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16; третьего игрока – абонент 17.

Случай 4: Игрок F_1 использует стратегию s_1^2, игрок F_2 – s_2^2, игрок F_3 – s_3^1. Аналогично первому случаю вычислим величины, характеризующие отношение стоимости услуг к их объему. Для абонентов $j \in J \cap J_{T_1}$: у игрока F_1 – $\frac{330}{100}$; у игрока F_2 – $\frac{320}{150}$; у игрока F_3 – $\frac{320}{150}$, либо $\frac{340}{100}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_1}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и второго игроков. Аналогично для абонентов $j \in J \cap J_{T_2}$: у игрока F_1 – $\frac{330}{6}$; у игрока F_2 – $\frac{320}{5}$; у игрока F_3 – $\frac{320}{4}$, либо $\frac{340}{7}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_2}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и второго игроков. Тогда $H_1(s_1^2, s_2^2) = 1610$, $H_2(s_1^2, s_2^2) = 2540$, $H_3(s_1^2, s_2^2, s_3^1) = 200$, так как первого игрока выберут абоненты 7, 8, 10, 11, 12, 13; второго игрока – абоненты 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 14, 15, 16; третьего игрока – абонент 17.

Случай 5: игрок F_1 использует стратегию s_1^1, игрок F_2 – s_2^1, игрок F_3 – s_3^2. Аналогично первому случаю вычислим величины, характеризующие отношение стоимости услуг к их объему. Для абонентов $j \in J \cap J_{T_1}$: у игрока F_1 – $\frac{300}{200}$; у игрока F_2 – $\frac{310}{200}$; у игрока F_3 – $\frac{320}{150}$, либо $\frac{340}{100}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_1}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и второго игроков. Аналогично для абонентов $j \in J \cap J_{T_2}$: у игрока F_1 – $\frac{300}{2}$; у игрока F_2 – $\frac{310}{3}$; у игрока F_3 – $\frac{320}{4}$, либо $\frac{340}{7}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_2}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги второго и третьего игроков. Тогда $H_1(s_1^1, s_2^1) = 2090$, $H_2(s_1^1, s_2^1) = 1140$, $H_3(s_1^1, s_2^1, s_3^2) = 790$, так как первого игрока выберут абоненты 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13; второго игрока – абоненты 6, 8, 14, 15, 16; третьего игрока – абоненты 7, 9, 17.

Случай 6: игрок F_1 использует стратегию s_1^2, игрок $F_2 - s_2^1$, игрок $F_3 - s_3^2$. Аналогично первому случаю вычислим величины, характеризующие отношение стоимости услуг к их объему. Для абонентов $j \in J \cap J_{T_1}$: у игрока $F_1 - \frac{330}{100}$; у игрока $F_2 - \frac{310}{200}$; у игрока $F_3 - \frac{320}{150}$, либо $\frac{340}{100}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_1}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и второго игроков. Аналогично для абонентов $j \in J \cap J_{T_2}$: у игрока $F_1 - \frac{330}{6}$; у игрока $F_2 - \frac{310}{3}$; у игрока $F_3 - \frac{320}{4}$, либо $\frac{340}{7}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_2}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и третьего игроков. Тогда $H_1(s_1^2, s_2^1) = 1610$, $H_2(s_1^2, s_2^1) = 1860$, $H_3(s_1^2, s_2^1, s_3^2) = 790$, так как первого игрока выберут абоненты 7, 8, 10, 11, 12, 13; второго игрока – абоненты 1, 2, 3, 4, 5, 14, 15, 16; третьего игрока – абоненты 6, 9, 17.

Случай 7: игрок F_1 использует стратегию s_1^1, игрок $F_2 - s_2^2$, игрок $F_3 - s_3^2$. Аналогично первому случаю вычислим величины, характеризующие отношение стоимости услуг к их объему. Для абонентов $j \in J \cap J_{T_1}$: у игрока $F_1 - \frac{300}{200}$; у игрока $F_2 - \frac{320}{150}$; у игрока $F_3 - \frac{320}{150}$, либо $\frac{340}{100}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_1}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и второго игроков. Аналогично для абонентов $j \in J \cap J_{T_2}$: у игрока $F_1 - \frac{300}{2}$; у игрока $F_2 - \frac{320}{5}$; у игрока $F_3 - \frac{320}{4}$, либо $\frac{340}{7}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_2}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги второго и третьего игроков. Тогда $H_1(s_1^1, s_2^2) = 2090$, $H_2(s_1^1, s_2^2) = 1240$, $H_3(s_1^1, s_2^2, s_3^2) = 790$, так как первого игрока выберут абоненты 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13; второго игрока – абоненты 6, 8, 14, 15, 16; третьего игрока – абоненты 7, 9, 17.

Случай 8: игрок F_1 использует стратегию s_1^2, игрок $F_2 - s_2^2$, игрок $F_3 - s_3^2$. Игрок F_1 использует стратегию s_1^2, игрок $F_2 - s_2^2$, игрок $F_3 - s_3^1$. Аналогично первому случаю вычислим величины, характеризующие отношение стоимости услуг к их объему. Для абонентов $j \in J \cap J_{T_1}$: у игрока F_1 – $\frac{330}{100}$; у игрока F_2 – $\frac{320}{150}$; у игрока F_3 – $\frac{320}{150}$, либо $\frac{340}{100}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_1}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и второго игроков. Аналогично для абонентов $j \in J \cap J_{T_2}$: у игрока F_1 – $\frac{330}{6}$; у игрока F_2 – $\frac{320}{5}$; у игрока F_3 – $\frac{320}{4}$, либо $\frac{340}{7}$. Таким образом, абоненты $j \in J \cap J_{T_2}$ будут сравнивать на предпочтительность услуги первого и второго игроков. Тогда $H_1(s_1^2, s_2^2) = 1610$, $H_2(s_1^2, s_2^2) = 2540$, $H_3(s_1^2, s_2^2, s_3^2) = 230$, так как первого игрока выберут абоненты 7, 8, 10, 11, 12, 13; второго игрока – абоненты 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 14, 15, 16; третьего игрока – абонент 17.

В таблице 6 представлены результаты распределения абонентов между игроками в зависимости от того, какие стратегии использованы.

Стратегии	**Множество абонентов игрока 1**	**Множество абонентов игрока 2**	**Множество абонентов игрока 3**
s_1^1, s_2^1, s_3^1	{ 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13}	{ 6, 8, 14, 15, 16}	{ 7, 9, 17}
s_1^2, s_2^1, s_3^1	{ 7, 8, 10, 11, 12, 13}	{ 1, 2, 3, 4, 5, 14, 15, 16}	{ 6, 9, 17}
s_1^1, s_2^2, s_3^1	{ 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13}	{ 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16}	{ 17}
s_1^2, s_2^2, s_3^1	{ 7, 8, 10, 11, 12, 13}	{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 14, 15, 16}	{ 17}
s_1^1, s_2^1, s_3^2	{ 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13}	{ 6, 8, 14, 15, 16}	{ 7, 9, 17}
s_1^2, s_2^1, s_3^2	{ 7, 8, 10, 11, 12, 13}	{ 1, 2, 3, 4, 5, 14, 15, 16}	{ 6, 9, 17}
s_1^1, s_2^2, s_3^2	{ 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13}	{ 6, 8, 14, 15, 16}	{ 7, 9, 17}
s_1^2, s_2^2, s_3^2	{ 7, 8, 10, 11, 12, 13}	{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 14, 15, 16}	{ 17}

Таблица 6. Результаты распределения абонентов между игроками.

Игра со значениями функций выигрыша каждого игрока изображена на рисунке 3.

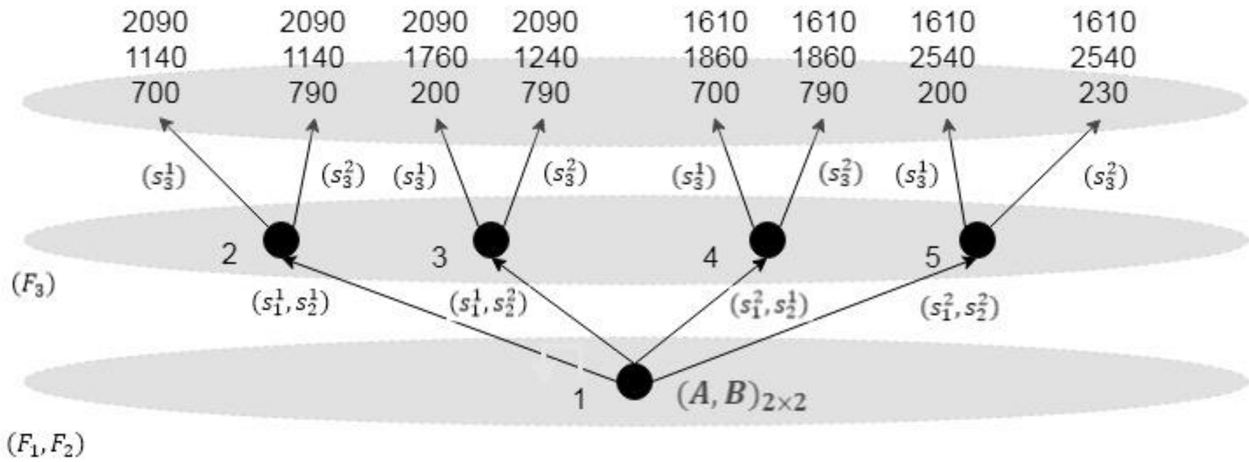

Рис. 3. Иллюстрация примера со значениями функций выигрыша.

Теперь найдем абсолютное равновесие по Нэшу в одноэтапной двухшаговой игре. Для этого начнем рассматривать игру с конца. В узлах 2, 3, 4 и 5 свое решение принимает игрок F_3. Соответственно, во всех этих узлах он выберет стратегию s_3^2, поскольку она позволяет ему получить наибольший выигрыш. В зависимости от альтернатив, выбранных третьим игроком, в узле 1 строится матрица для биматричной игры, разыгрываемой первым и вторым игроками. Вид этой матрицы представлен в таблице 7.

	s_2^1	s_2^2
s_1^1	(2090,1140)	(2090,1240)
s_1^2	(1610,1860)	(1610,2540)

Таблица 7. Матрица для биматричной игры

Решением данной биматричной игры является пара (2090,1240).

Тогда получаем, что игровая ситуация, когда в узле игроки F_1 и F_2 одновременно выбирают стратегии s_1^1 и s_2^2, соответственно, а в узлах 2, 3, 4, 5 игрок F_3 выбирает стратегию s_3^2, является ситуацией абсолютного равновесия по Нэшу, которая записывается в виде $[(s_1^1, s_2^2); (s_3^2); (s_3^2); (s_3^2); (s_3^2)]$.

На рисунке 4 выделена ситуация абсолютного равновесия по Нэшу.

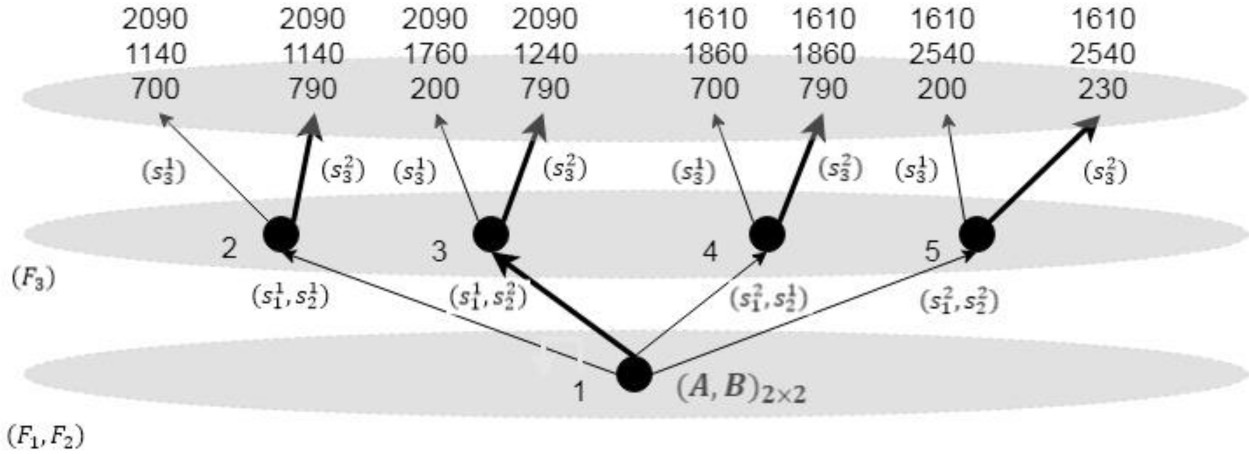

Рис. 4. Иллюстрация решения примера.

Далее проверим выполнение условий теоремы для найденной ситуации равновесия, т.е. требуется, чтобы следующая система неравенств была верна:

$$\begin{cases} \dfrac{g(s_1^1)}{g(s_1^2)} \geq \dfrac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_1^2) \times \left(1 - V_j(s_2^2)\right) + 4}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_1^1) \times \left(1 - V_j(s_2^2)\right) + 4}, \\ \dfrac{g(s_2^2)}{g(s_2^1)} \geq \dfrac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_2^1) \times \left(1 - V_j(s_1^1)\right) + 3}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_2^2) \times \left(1 - V_j(s_1^1)\right) + 3}, \\ \dfrac{g(s_3^2)}{g(s_3^1)} \geq \dfrac{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_3^1) \times \left(1 - V_j(s_1^1)\right) \times \left(1 - V_j(s_2^2)\right) + 1}{\sum_{j\in J_T\cap J^0} V_j(s_3^2) \times \left(1 - V_j(s_1^2)\right) \times \left(1 - V_j(s_2^2)\right) + 1}, \end{cases}$$

то есть:

$$\begin{cases} \dfrac{240}{280} \geq \dfrac{2+4}{5+4}, \\ \dfrac{260}{240} \geq \dfrac{3+2}{3+2}, \\ \dfrac{250}{280} \geq \dfrac{1+0}{2+1}. \end{cases}$$

Таким образом, условия теоремы о ситуации абсолютного равновесия по Нэшу для построенного примера.

Глава 3. Обобщение игры на l этапов

Предположим, что описанная ранее игра (2 шага) при неизменных начальных предположениях повторяется l раз. К тому же, пусть для $\forall\, l \in Z$ выполнено:

$$J^l = J = J_1^l \cup J_2^l \cup J_3^l.$$

Введем отношения предпочтений для абонента $j \in J$ услуг, предлагаемых фирмами F_1 и F_2 на этапе l.

Для абонентов $j \in J^l \cap J_{T_2}$ будем говорить, что пара $\left(c_{i_l}^1, i_l\right)$ предпочтительнее, чем пара $\left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, т.е. $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 > b_{i_p}^2$;
2) $c_{i_l}^1 = c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 > b_{i_p}^2$;
3) $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 = b_{i_p}^2$.

Для остальных случаев:

1) если $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 < b_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^{l-1} \cap J_{T_2}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^{l-1} \cap J_{T_2}$.
2) если $c_{i_l}^1 > c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 > b_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^{l-1} \cap J_{T_2}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^{l-1} \cap J_{T_2}$.
3) если $c_{i_l}^1 = c_{i_p}^2$ и $b_{i_l}^1 = b_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^{l-1} \cap J_{T_2}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^{l-1} \cap J_{T_2}$.
4) если выполняется одно из трех предыдущих условий, но $j \notin J_1^{l-1} \cap J_{T_1}$ и $j \notin J_2^{l-1} \cap J_{T_2}$, то тогда $j \in J_{nd}^l$, где J_{nd}^l – множество абонентов,

которые равнозначно могут выбрать услуги как одной из сравниваемых фирм, так и услуги другой.

Для абонента $j \in J^l \cap J_{T_1}$ будем говорить, что пара $\left(c_{i_l}^1, i_l\right)$ предпочтительнее, чем пара $\left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, т.е. $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_l\right)$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $v_l^1 > v_{i_p}^2$;
2) $c_{i_l}^1 = c_{i_p}^2$ и $v_{i_l}^1 > v_{i_p}^2$;
3) $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $v_{i_l}^1 = v_{i_p}^2$.

Для остальных случаев:

1) если $c_{i_l}^1 < c_{i_p}^2$ и $v_{i_l}^1 < v_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^{l-1} \cap J_{T_1}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^{l-1} \cap J_{T_1}$.
2) если $c_{i_l}^1 > c_{i_p}^2$ и $v_{i_l}^1 > v_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^{l-1} \cap J_{T_1}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^{l-1} \cap J_{T_1}$.
3) если $c_{i_l}^1 = c_{i_p}^2$ и $v_{i_l}^1 = v_{i_p}^2$, то $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \succ \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_2^{l-1} \cap J_{T_1}$ и $\left(c_{i_l}^1, i_l\right) \prec \left(c_{i_p}^2, i_p\right)$, если $j \in J_1^{l-1} \cap J_{T_1}$.
4) если выполняется одно из трех предыдущих условий, но $j \notin J_1^{l-1} \cap J_{T_1}$ и $j \notin J_2^{l-1} \cap J_{T_1}$, то тогда $j \in J_{nd}^l$, где J_{nd}^l – множество абонентов, которые равнозначно могут выбрать услуги как одной из сравниваемых фирм, так и услуги другой.

Далее мы смотрим, если $|J_{nd}^l| = 2k$, где $k \in Z$, то половина абонентов из J_{nd}^l выбирает фирму F_1, а вторая половина – фирму F_2. Если $|J_{nd}^l| = 2k + 1$, где $k \in Z$, то фирму F_1 (фирму с более высоким рыночным положением) выбирает на одного абонента $j \in J_{nd}^l$ больше.

Для определения предпочтительности услуг, предлагаемых фирмами F_2 и F_3, действуем аналогично.

Для определения предпочтительности услуг, которые предлагают фирмы F_1 и F_3, действуем аналогично.

Сначала абонент выбирает две из трех фирм для сравнения их услуг на предпочтительность, основываясь на показателе $\frac{c_i^k}{v_i^k}$ для абонентов $j \in J^l \cap J_{T_1}$ и величине $\frac{c_i^k}{b_i^k}$ для абонентов $j \in J^l \cap J_{T_2}$. Он выбирает те две фирмы, для которых этот показатель меньше. Здесь стоит отметить, что при сравнении фирмы-лидера и фирмы-претендента абонент сравнивает соответствующие величины для одной выбранной каждым игроком стратегии, т.к. на первом шаге игры разыгрывается биматричная игра между фирмой-лидером и фирмой-претендентом. Для третьей же фирмы абонент сравнивает все возможные стратегии, так как фирма-последователь может выбрать любую из них, и, если для всех из теоретически возможных стратегий оказывается, что величина $\frac{c_i^k}{v_i^k}$ для абонентов $J^l \cap J_{T_1}$ и показатель $\frac{c_i^k}{b_i^k}$ для абонентов $j \in J^l \cap J_{T_2}$ оказывается не самой большой, то фирма-последователь становится одной из двух фирм, услуги которых сравнивает на предпочтительность абонент j.

Обозначим за $G_k^l(s_k^{i_r})$ суммарную прибыль фирмы $k \in \{1,2,3\}$ от абонентов $j \in J_P \cap J_k^l$ на этапе l.

$$G_k^l(s_k^{i_r}) = \sum_{j \in J_P \cap J_k^l} g_j(s_k^{i_r}),$$

где $k \in \{1,2,3\}$ и $i_r \in I_k$. Тогда функции выигрыша на этапе l для игроков F_1, F_2, F_3 соответственно равны:

$$H_1^l\left(s_1^{i_l}, s_2^{i_p}, J^{l-1}\right) = -f_1 + \sum_{j \in J_T \cap J^{l-1}} g_j(s_1^{i_l}) \times V_j(s_1^{i_l}) \times \left(1 - V_j\left(s_2^{i_p}\right)\right) + G_1^l(s_1^{i_l}),$$

где $i_l \in I_1, i_p \in I_2$.

$$H_2^l\left(s_1^{i_l}, s_2^{i_p}, J^{l-1}\right)$$
$$= -f_2 + \sum_{j \in J_T \cap J^{l-1}} g_j\left(s_2^{i_p}\right) \times V_j\left(s_2^{i_p}\right) \times \left(1 - V_j\left(s_1^{i_l}\right)\right) + G_2^l\left(s_2^{i_p}\right),$$

где $i_l \in I_1, i_p \in I_2$.

$$H_3^l\left(s_1^{i_l}, s_2^{i_p}, s_3^{i_s}, J^{l-1}\right)$$
$$= -f_3 + \sum_{j \in J_T \cap J^{l-1}} g_j\left(s_3^{i_s}\right) \times V_j\left(s_3^{i_s}\right) \times (1 - V_j\left(s_1^{i_l}\right)) \times (1 - V_j\left(s_2^{i_p}\right))$$
$$+ G_3^l\left(s_3^{i_s}\right),$$

где $i_l \in I_1, i_p \in I_2, i_s \in I_3$.

Функции выигрыша выражают суммарную прибыль каждого игрока с учетом изменения дохода за счет потери и приобретения абонентов.

При этом неравенство (2) также выполняется для каждого этапа l.

Тогда суммарный выигрыш игрока k ($k \in \{1, 2, 3\}$) за l повторяющихся этапов будет равен:

$$H_k = \sum_{i=1}^{l} H_k^i.$$

Схематично повторяющаяся n этапов двухшаговая игра в развернутой форме для случая, когда в множество стратегий каждого игрока входит по 2 стратегии представлена на Рис. 2.

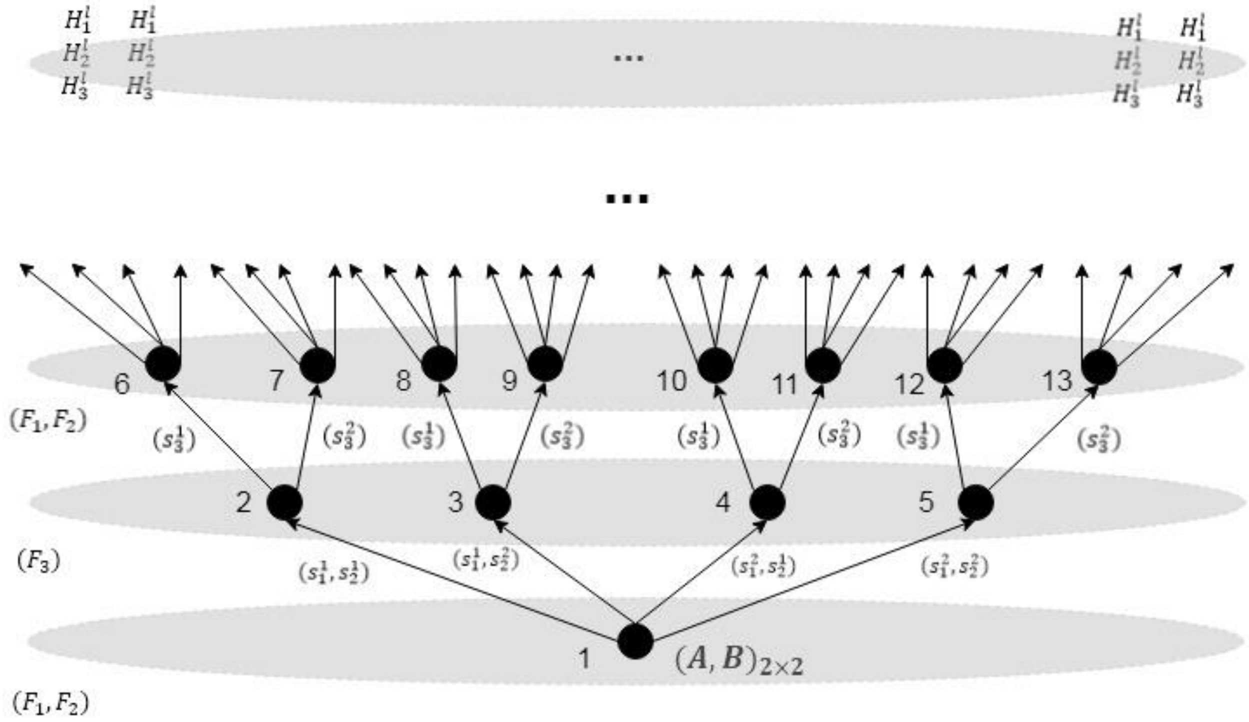

Рис. 2. Игра в развернутой форме.

Поясним игру, изображенную на рисунке 2. В позиции 1 фирма-лидер F_1 и фирма-претендент F_2 выбирают по одной из двух своих стратегий, действуя одновременно и независимо друг от друга, разыгрывая биматричную игру. В позициях 2, 3, 4, 5 в зависимости от выбора игроков F_1 и F_2 свой выбор делает фирма-последователь – игрок F_3, который может выбрать либо стратегию s_3^1, либо стратегию s_3^2. При этом, в случае, если обе эти стратегии дают ему одинаковый выигрыш, при выборе своей стратегии этот игрок подыгрывает фирме-лидеру. Описанные два шага повторяются l раз, начиная с позиций 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Таким образом, конкурентная борьба на рынке телекоммуникационных услуг может быть формализована в виде повторяющейся l раз неантагонистической двухшаговой игры Г:

$$\Gamma = < N, S_1,\ S_2,\ S_3, H_1^l, H_2^l, H_3^l >.$$

Как проходит игра?

1. Сначала игроки F_1 и F_2 выбирают свои стратегии, в соответствии с которыми они действуют. Таким образом, предварительно два игрока разыгрывают между собой неантагонистическую биматричную игру.
2. На следующем шаге с учетом выбора игроков F_1 и F_2 свое решение принимает игрок F_3.
3. Первые два шага (т.е. один этап игры) повторяются l раз.

Заключение

В данной научной работе на первом этапе была рассмотрена и формализована задача моделирования процесса конкурентной борьбы на рынке телекоммуникационных услуг между тремя фирмами-участниками с использованием аппарата математической теории игр. Данная модель подразумевает дифференциацию игроков в зависимости от их роли в процессе конкурентного противодействия на рынке на следующие группы: рыночный лидер, претендент, и последователь – участник, нашедший свою нишу рынка.

За основу модели была взята многошаговая модель принятия решений Штакельберга. Согласно которой, на первом шаге решение принимает фирма-лидер, а на следующем шаге с учетом выбора лидера свое решение принимает фирма-последователь. При этом при принятии решений каждая из фирм преследует свою цель. В данной научной работе эта модель была значительно изменена и усложнена, что позволило взглянуть на процесс конкурентного противостояния с несколько иной стороны.

Таким образом, на первом этапе данной работы была построена многошаговая игра трех лиц, определены множества игроков, их стратегий, описаны функции выигрыша каждого типа игрока, которые учитывают те или иные особенности.

На втором этапе было найдено абсолютное равновесие по Нэшу в общем виде для случая одноэтапной двухшаговой игры, а также был проведен SWOT-анализ, на основе которого определены основные сильные и слабые стороны каждого игрока, которые, на взгляд автора, оказывают влияние на поведение компаний, что требовалось для определения множеств стратегий игроков для примера, на котором была проведена апробация и иллюстрация полученных теоретических результатов.

На третьем этапе сформулированная игра была распространена на l повторяющихся этапов.

В дальнейших исследованиях автор ставит себе целью достигнуть следующих результатов:

- Рассмотреть возможность построения абсолютного равновесия по Нэшу для случая l – этапной двухшаговой игры;
- Рассмотреть возможность построения сильного равновесия по Нэшу для случая l – этапной двухшаговой игры.

В заключении хотелось бы отметить, что процесс конкурентной борьбы и приложений к нему различных интеллектуальных методов реагирования представляет собой большой и интересный пласт задач, актуальность которых не уменьшается со временем, а даже наоборот, в условиях все большей глобализации, создания и открытия новых рынков сбыта, роста производственных мощностей и объемов продукции, а также фирм, эту продукцию предлагающих, увеличивается год от года, повышая тем самым научную и практическую ценность работ, посвященных данной тематике.

Список литературы

1. Левкин И.М., Микадзе С.Ю. Добывание и обработка информации в деловой разведке. – СПб: Университет ИТМО, 2015. – 460 с.
2. В. Л. Береснев, В. И. Суслов, Математическая модель конкурентной борьбы на рынке, Сиб. журн. индустр. матем., 2009, том 12, номер 1, С.11-24.
3. Воронов А.А., Овчаренко Н.А. Моделирование конкурентных процессов в конкурентной среде промышленных предприятий // Практический маркетинг. 2011. №5.
4. Копылов А.В., Просвиров А.Э. Динамическая модель конкуренции двух фирм на однородном рынке // Успехи современного естествознания. 2003. №8. С. 29-32.
5. Мхитарян С.В., Игнатова М.В. Анализ конкурентной ситуации на российском рынке кирпичной продукции, Математико-статистический анализ социально-экономических процессов/ Межвузовский сборник научных трудов, Выпуск 10. – М.: МЭСИ, 2013 – С.85-89.
6. Богомолова Е.В. SWOT-анализ: теория и практика применения, Экономический анализ: теория и практика, 2004, №17 (32). С. 57-60.
7. H. Von Stackelberg. The theory of the market economy. – England: Oxford University Press, 1952. – 328 p.
8. Зенкевич Н.А., Гладкова М.А. Теоретико-игровая модель конкуренции «качество-цена» на отраслевом рынке // Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия Менеджмент. 2007. Вып. 4. С.3-31.
9. Петросян Л.А., Седаков А.А. Повторяющиеся сетевые игры // Устойчивость и процессы управления. Материалы международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В. И. Зубова, 2015. — с. 250–251.

10. Петросян Л.А., Кузютин Д.В. Игры в развернутой форме: оптимальность и устойчивость. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000.
11. John F. Nash. Equilibrium Points in n-Person Games // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 36, No. 1. (Jan. 15, 1950), pp. 48-49.
12. Тарашнина С.И. Равновесные по Нэшу ситуации в игре простого преследования // Межвуз. сборник «Управление социально-экономическими системами», серия «Вопросы механики и процессов управления», Вып.20. Изд-во СПбГУ, 2002. с. 188-201.
13. Petrosyan L., Chistyakov S., Pankratova Y. Existence of strong nash equilibrium in repeated and multistage games // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017 - Proceedings. Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2017.
14. Nessah R., Tian G. On the existence of strong Nash equilibria // Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 414, Issue 2, June 2014, P. 871-885.
15. Hellwig M., Leininger W. On the existence of subgame-perfect equilibrium in infinite-action games of perfect information // Journal of Economic Theory, Volume 43, Issue 1, October 1987, P. 55-75.
16. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр: Учебное пособие. М.: Высш. шк: Книжный дом "Университет", 1998. 304 с.